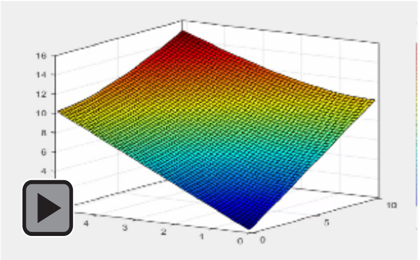


PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE UNA SECCIÓN PARABÓLICA

Jhonath Wensenber Mejía Gonzales
jwmejiagg@gmail.com
Ingeniero Hidráulico, Cajamarca, Perú

La ecuación de Manning es:

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} {S_o}^{1/2} \quad [1]$$

Por lo tanto:

$$\frac{Q\,n}{{S_o}^{1/2}} = A\,\frac{A^{2/3}}{P^{2/3}} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \quad [2]$$

en la cual el factor de sección F_s está dado por:

$$F_s = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \quad [3]$$

Por lo tanto:

$${F_s}^3 = \frac{A^5}{P^2} \quad [4]$$

El área y el perímetro de una sección parabólica para un tirante y_o y ancho de superficie libre T se muestran en la Fig. 1.

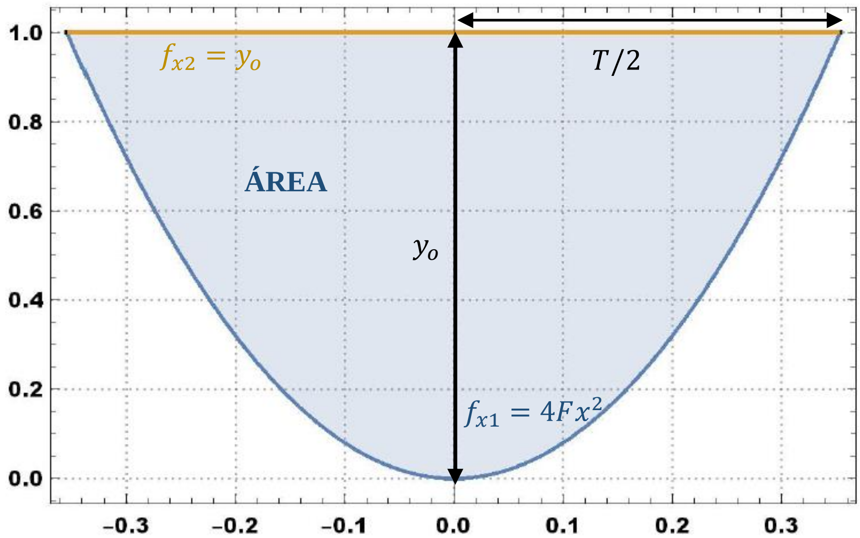


Fig. 1 Esquema de definición de una sección parabólica.

Para calcular el área se hace uso de la siguiente integral:

$$A = 2\int_0^{T/2} \left(f_{x2} - f_{x1}\right) dx \quad [5]$$

$$A = 2\int_0^{T/2} (y_o)\, dx - 2\int_0^{T/2} (4Fx^2)\, dx \qquad [6]$$

$$A = 2y_o[x]_0^{T/2} - 8F\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{T/2} \qquad [7]$$

$$A = y_o T - \frac{FT^3}{3} \qquad [8]$$

en la cual $4F$ es un parámetro de la parábola definido como sigue:

$$4F = \frac{y_o}{(T/2)^2} = \frac{4y_o}{T^2} \qquad [9]$$

Por lo tanto:

$$F = \frac{y_o}{T^2} \qquad [10]$$

Reemplazando la Ec. 10 en la Ec. 8:

$$A = y_o T - \frac{y_o}{T^2}\frac{T^3}{3} = y_o T - \frac{y_o T}{3} \qquad [11]$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{2y_o T}{3} \qquad [12]$$

Para el perímetro mojado, se utiliza una integral de línea:

$$P = 2\int_0^{T/2} \sqrt{1 + (f'_{x1})^2}dx \qquad [13]$$

$$P = 2\int_0^{T/2} \sqrt{1 + (8F)^2 x^2}dx \qquad [14]$$

La Ecuación 14 tiene la forma de una integral conocida $\int\sqrt{a^2 + x^2}dx$, y su solución es:

$$P = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1 + (8F)^2 x^2} + \frac{\operatorname{senh}^{-1}(8Fx)}{2(8F)}\right]_0^{T/2} \qquad [15]$$

$$P = 2\left[\frac{T}{4}\sqrt{1 + (8F)^2\frac{T^2}{4}} + \frac{\operatorname{senh}^{-1}\left(8F\frac{T}{2}\right)}{2(8F)}\right] \qquad [16]$$

Reemplazando la Ec. 10 en la Ec. 16, se obtiene:

$$P = 2\left[\frac{T}{4}\sqrt{1 + \left(8\frac{y_o}{T^2}\right)^2\frac{T^2}{4}} + \frac{\operatorname{senh}^{-1}\left(8\frac{y_o}{T^2}\frac{T}{2}\right)}{2\left(8\frac{y_o}{T^2}\right)}\right] \qquad [17]$$

$$P = \frac{T}{2}\sqrt{1 + \frac{16{y_o}^2}{T^2}} + \frac{T^2}{8y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right) \qquad [18]$$

$$P = \frac{T}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right)\right] \qquad [19]$$

La Ecuación 19 se puede expresar en función de logaritmos, dado que:

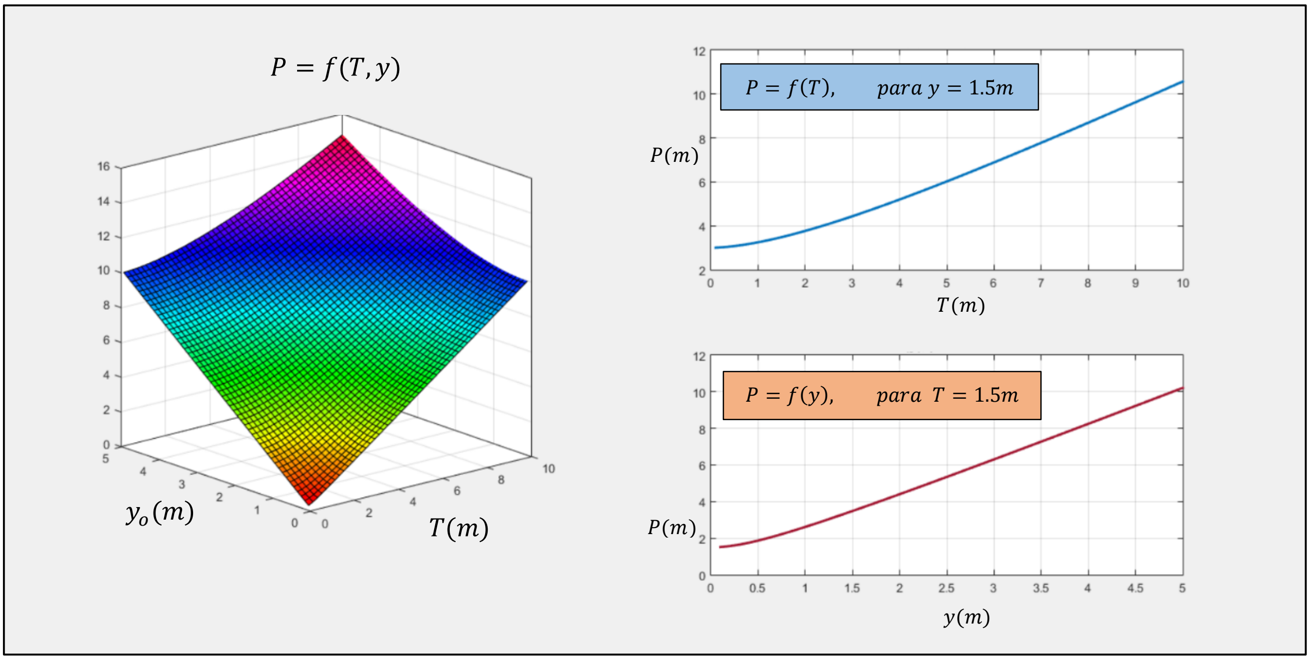
$$\operatorname{senh}^{-1}(\theta) = \ln\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right) \qquad [20]$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{T}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\ln\left(\frac{4y_o}{T} + \sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2}\right)\right] \qquad [21]$$

La Ecuación 21 es la misma fórmula que aparece en la Tabla 2-1 del libro de Ven Te Chow (1994): "Hidráulica de Canales Abiertos".

Graficando la Ecuación 19, $P = f(T, y_o)$; para $0<T<10$, $0<y_o<5$:



A continuación, se utiliza la Ec. 19 para construir las propiedades geométricas de la parábola.

El ancho de superficie libre T es:

$$T = \frac{3A}{2y_o} \qquad [22]$$

El radio hidráulico R es:

$$R = \frac{A}{P} \qquad [23]$$

$$R = \frac{\frac{2y_oT}{3}}{\frac{T}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right)\right]} \qquad [24]$$

$$R = \frac{4y_o}{3}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right)\right]^{-1} \qquad [25]$$

El tirante hidráulico D es:

$$D = \frac{A}{T} = \frac{A}{\frac{3A}{2y_o}} \qquad [26]$$

Por lo tanto:

$$D = \frac{2y_o}{3} \qquad [27]$$

Tabla 1. Parámetros geométricos de una sección parabólica.

Área	**Ec. 12**	$\frac{2y_oT}{3}$
Perímetro mojado	**Ec. 19**	$\frac{T}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right)\right]$
Ancho de la superficie libre	**Ec. 22**	$\frac{3A}{2y_o}$
Radio hidráulico	**Ec. 25**	$\frac{4y_o}{3}\left[\sqrt{1+\left(\frac{4y_o}{T}\right)^2} + \frac{T}{4y_o}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4y_o}{T}\right)\right]^{-1}$
Tirante hidráulico	**Ec. 27**	$\frac{2y_o}{3}$

Jhonath Wensenber Mejía Gonzales, *de Cajamarca, Perú, es* ***ingeniero hidráulico***, *egresado de la carrera de ingeniería hidráulica de la* ***Universidad Nacional de Cajamarca***. *Jhonath es colaborador de investigación del* ***Visualab*** *desde marzo de 2017.*